

CORRIGÉ 1 Soit  $n$  le nombre de marches de l'escalier.

On a  $n \in \llbracket 246; 260 \rrbracket$  et  $\begin{cases} n \equiv 1[4] \\ n \equiv 2[3] \end{cases}$  c'est-à-dire il existe  $q, q' \in \mathbb{N}$  tels que  $n = 1 + 4q \iff 3n = 3 + 12q$  et  $n = 2 + 3q' \iff 4n + 8 + 12q'.$

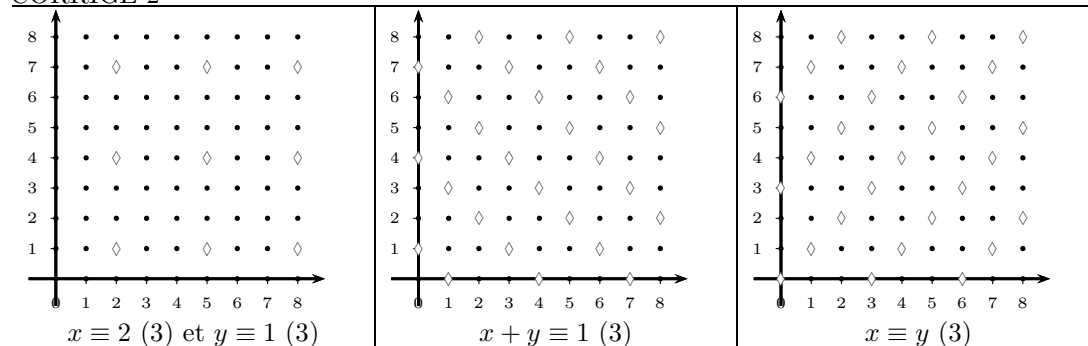
Par différence:  $4n - 3n = 8 - 3 + 12(q' - q) \iff n = 5 + 12q'.$

240 est un multiple de 12, donc  $245 \equiv 5[12]$  donc le nombre cherché est  $245+12=257.$

On vérifie que  $257 \equiv 1[4]$  et  $257 \equiv 2[3].$

On peut aussi voir que seuls 249, 253 et 257 sont dans l'intervalle requis et sont congrus à 1 modulo 4. Puis, parmi ces 3 entiers, seul 257 est congru à 2 modulo 3.

CORRIGÉ 2



CORRIGÉ 3①  $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

Soit  $(x ; y) \in \mathbb{Z}$  tel que  $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}.$

$7 \equiv 0[7]$  donc  $7y^2 \equiv 0[7]$  en multipliant les 2 membres par  $y^2$  (compatibilité de la congruence avec le produit).

$10 \equiv 3[7]$  donc, en multipliant les 2 membres par eux-mêmes (c'est donc bien une comptabilité avec le produit et absolument pas avec les exposants), on a:

$10^2 \equiv 3^2[7] \iff 10^2 \equiv 9[7] \iff 10^2 \equiv 2[7]$  et donc  $10^{2n} \equiv 2^n[7].$

Finalement  $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \implies 3x^2 \equiv 2^n[7]$

Il faut comprendre que la deuxième ligne du tableau suivant est une compatibilité avec le produit et non pas avec les exposants:

Reste de la division de $x$ par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de $x^2$ par 7	0	1	4	2	2	4	1
Reste de la division de $3x^2$ par 7	0	3	5	6	6	5	3

- ② Il faut comprendre que la deuxième ligne du tableau suivant est **fausse** car il n'y a pas compatibilité avec les exposants:

$n[7]$	0	1	2	3	4	5	6	$7 \equiv 0[7]$
$2^n[7]$	1	2	4	1	2	4	1	$\begin{matrix} 1 \\ (\text{FAUX}) \end{matrix}$

Il faut aussi comprendre que le tableau précédent, certes faux, a l'avantage de passer en revue **toutes** les valeurs de  $n$ , ce qui n'est pas le cas du tableau suivant qui, par conséquent, ne donne qu'une **conjecture**, et pas une démonstration (mais il a l'avantage de ne pas être faux, contrairement au précédent):

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$2^n[7]$	1	2	4	1	2	4	1

(à la première ligne, on a écrit  $n$  et non  $n[7]$ , ce qui fait que le tableau est juste, mais ne donne qu'une conjecture établie à partir de 7 valeurs de  $n$ )

Comment faire alors?

Soit  $n \in \mathbb{Z}$  (cette petite phrase permet d'établir la propriété pour **tous** les  $n \in \mathbb{Z}$ ).

Il existe un unique couple  $(q, r)$  avec  $q \in \mathbb{Z}$  et  $r \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$  tel que  $n = 3q + r$ .

$$2^n = 2^{3q+r} = (2^3)^q \times 2^r = 8^q \times 2^r \equiv 2^r[7] \text{ car } 8 \equiv 1[7].$$

Il suffit donc de donner les valeurs de  $2^r[7]$  pour les 3 valeurs possibles de  $r$ :

$r$	0	1	2
$2^r[7]$	1	2	4

On a montré que, pour le  $n \in \mathbb{Z}$  arbitrairement choisi, on a  $2^n \in \{1; 2; 4\}$

Soit  $(x; y)$  une solution de (G), qui d'après la question 1 doit vérifier  $3x^2 \equiv 2^n[7]$ .

Le membre de gauche est dans  $\{0; 3; 5; 6\}$  et celui de droite dans  $\{1; 2; 4\}$ , il n'y a donc aucune solution.

CORRIGÉ 4①  $999 = 27 \times 37$  donc  $999 \equiv 0[27]$  donc  $10^3 \equiv 1[27]$ .

$$10^{100} = (10^3)^{33} \times 10 \equiv 1^{33} \times 10[27] \text{ d'après ce qui précède}$$

$$100^{10} = (10^2)^{10} = 10^{20} = (10^3)^6 \times 10^2 \equiv 1^6 \times 100[27] \text{ d'après ce qui précède.}$$

$$\text{Finalement } 10^{100} + 100^{10} \equiv 10 + 100[27]$$

$$\text{Or } 110 = 27 \times 4 + 2 \text{ donc le reste cherché est } 2$$

- ② Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$5^{2n} = (5^2)^n = 25^n. \text{ Or } 25 \equiv 14[11] \text{ car } 11 \text{ divise } 25 - 14 = 11.$$

$$\text{Donc } 25^n \equiv 14^n[11] \text{ soit } 11 \text{ divise } 5^{2n} - 14^n$$

- ③ Résolvons dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(x+3)^2 \equiv 1[4]$ , par disjonction des cas sur les valeurs possibles de  $x$  modulo 4:

$x \bmod 4$	0	1	2	3
$x+3 \bmod 4$	3	0	1	2
$(x+3)^2 \bmod 4$	1	0	1	0

On en déduit que les solutions sont tous les nombres  $x$  tels que  $x \equiv 0[4]$  ou

$x \equiv 2[4]$  c'est-à-dire tous les nombres pairs.